12 – апта.

Таңбалары ауыспалы қатарлар

$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$,

$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots,$ қатарларын қарастырамыз.

Анықтама 4. Сандық қатарының мүшелері деп аталатын u_i, $i = 1,2,\ldots,\ldots$ оң да, теріс те болатын болса, онда бұл қатар таңбалары ауыспалы қатар деп аталады.

Таңбалары алма-кезек ауыспалы қатарының дербес жағдайы:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots, \qquad a_i \geq 0, i = 1,2,\ldots$$

Лейбниц белгісі. Егер (8) қатарының мүшелері үшін қандай да бір N нөмірінен бастап $a_N \geq a_{N+1} \geq a_{N+2} \geq \ldots$ теңсіздігі орындалып және $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болса, онда қатары жинақты және оның қосындысы оң сан.

Мысал №1. $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

қатары Лейбниц белгісі бойынша жинақты, ал оның абсолют шамаларынан құрылған қатар (гармониялық қатар) жинақсыз. Ендеше, қатар шартты жинақты.

Мысал №2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n .$$

Шешуі. Берілген қатардың абсолют шамаларынан құралған қатарды қарастырамыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n .$$

Бұл қатар Коши белгісі бойынша жинақты: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1$.

Сонымен, берілген қатар абсолютті жинақты.

Мысал №3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Шешуі. Берілген қатардың абсолют шамаларынан құралған қатарды қарастырамыз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, бұл қатар көрсеткіші $p = \frac{1}{2} < 1$ болатын Дирихле қатары.

Берілген қатар таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар болғандықтан, Лейбниц белгісін қолдансақ:

1) $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, яғни, қатардың мүшелерінің тізбегі кемімелі;

2) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Ендеше, берілген қатар шартты жинақты.